أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الهندسة الفضائية

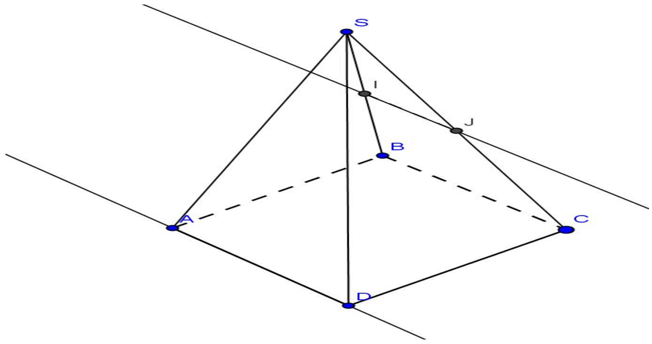
المستوى : الجذع مشترك علمي
و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1:

ليكن $SABCD$ هرما قاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$
و لتكن I و J منتصفي القطعتين $[SB]$ و $[SC]$ على التوالي.

1) بين أن $(AD)\parallel(IJ)$



2) أثبت أن $(IJ)\parallel(ADS)$

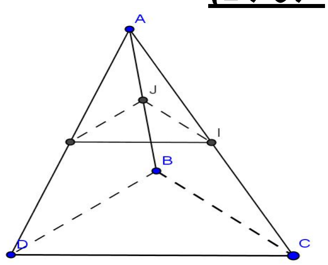
الجواب(1

في المثلث SBC لدينا: I منتصف $[SB]$ و J منتصف $[SC]$
إذن, $(IJ)\parallel(BC)$.
و لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع اذن $(BC)\parallel(AD)$ و منه ان $(AD)\parallel(IJ)$ (1)
لدينا $A\in(ADS)$ و $D\in(ADS)$ إذن $(AD)\subset(ADS)$ (2)
من(1) و(2) نستنتج أن: $(IJ)\parallel(ADS)$

تمرين2: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[AC]$
و J منتصف القطعة $[AB]$ و K منتصف القطعة $[AD]$

1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن $(BCD)\parallel(IJK)$

الجواب(1



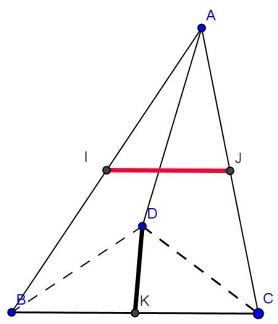
2) في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(IJ)\parallel(BC)$

و لدينا في المثلث ABD : K منتصف $[AD]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(JK)\parallel(BD)$

و لدينا : $(IJ)\parallel(BC)$ و $(BC)\subset(BCD)$ إذن $(IJ)\parallel(BCD)$ (1)
و لدينا : $(JK)\parallel(BD)$ و $(BD)\subset(BCD)$ اذن $(JK)\parallel(BCD)$ (2)
و لدينا : $(IJ)\cap(JK)=\{J\}$ (3)
و لدينا : $(IJ)\subset(IJK)$ و $(JK)\subset(IJK)$ (4)
إذن(1) و(2) و(3) و(4) نستنتج أن: $(BCD)\parallel(IJK)$

تمرين3: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه حيث : $BD=DC$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف القطعة $[BC]$

1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن $(DK)\perp(IJ)$

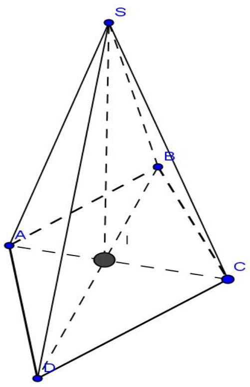


الجواب(1

في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$ اذن
$(1)(IJ)\parallel(BC)$
و في المثلث BCD
لدينا $BD=DC$ و K منتصف القطعة $[BC]$ اذن : $(DK)\perp(BC)$ (2)
من(1) و(2) نستنتج أن: $(DK)\perp(IJ)$

تمرين4: ليكن $ABCD$ شبه منحرف قطراه $[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في I . لتكن S نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث يكون $(SI)\perp(ABC)$

1) حدد تقاطع المستويين (SAC) و (SBD) وحدد تقاطع المستويين (SAB) و (SDC) .
2) تحقق أن $(SI)\perp(AB)$ وبين أن المستويين (SAC) و (ABC) متعامدان.
3) نفترض أن المثلث ABC قائم الزاوية في B و أن $SI=3$
$BC=\frac{1}{4}$, $AB=2$, $CD=3$.
أحسب حجم الهرم $SABCD$



الجواب(1) أ)لدينا
$(SAC)\neq(SBD)$ لأن النقط S ,
A , B , C و D غير مستوائية.
لدينا: $S\in(SAC)$
و $S\in(SBD)$
و لدينا $I\in(AC)$ و
$(AC)\subset(SAC)$ إذن $I\in(SAC)$
و لدينا $I\in(BD)$ و $(BD)\subset(SBD)$ إذن $I\in(SBD)$
إذن المستويان (SAC) و (SBD) يشتركان في النقطتين S و I .
إذن $(SAC)\cap(SBD)=(IS)$
ب)لدينا $S\in(SAB)$ و $S\in(SDC)$

و لدينا $(AB)\subset(SAB)$ و $(DC)\subset(SDC)$ و $(DC)\parallel(AB)$.

إذن (SAB) و (SDC) يتقاطعان في مستقيم يمر من S و يوازي المستقيمين (AB) و (DC).حسب مبرهنة السقف.

2)أ)لدينا $(SI)\perp(ABC)$ و $(AB)\subset(ABC)$.

إذن $(SI)\perp(AB)$

ب)لدينا $(SI)\subset(SAC)$ و $(SI)\perp(AC)$

إذن $(SI)\perp(ABC)$ و منه فان $(ABC)\perp(SAC)$

3) $((AB)\perp(BC))$ و منه مساحة شبه المنحرف $ABCD$

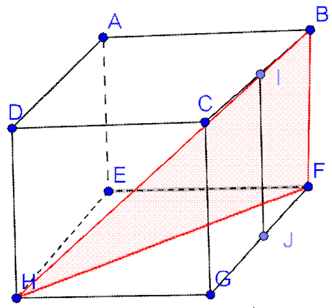
هي: $S=\frac{(DC+AB)\times BC}{2}=\frac{(3+2)\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$

(لأن ارتفاعه هو BC)ومنه حجم الهرم $SABCD$ هو: $V=\frac{1}{3}\cdot S\times(SI)$

أي: $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot 3=\frac{5}{8}$

تمرين5:ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء.

لتكن I و J منتصفي القطعتين $[BC]$ و $[FG]$ على التوالي.



1) بين أن $(IJ)\parallel(HFB)$

2) بين أن $(HFB)\cap(EJ)=(PQ)$

حيث $(HF)\cap(EJ)=\{P\}$

و $(AI)\cap(BD)=\{Q\}$

3) بين أن $(PQ)\parallel(FB)$

الجواب1)لدينا I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[FG]$ و لدينا $(IJ)\parallel(BF)$ و بما أن $(BF)\subset(HFB)$ فان $(IJ)\parallel(HFB)$ و هذا هو المطلوب.

2)لدينا $(EJ)\subset(EIJ)$ و $(AI)\subset(EIJ)$ (لأن $(AE)\parallel(IJ)$ و منه النقط A , I , E و J نقط استوائية)

إذن $P\in(EIJ)$ و $Q\in(EIJ)$ ($Q\in(AI)$ و $P\in(EJ)$) و هذا يعني أن $(PQ)\subset(EIJ)$ (1) من جهة أخرى لدينا $(HF)\subset(HFB)$ و $(BD)\subset(HFD)$ (لأن $(DH)\parallel(BF)$ ومنه النقط D, H و F مستوائية).

إذن $P\in(HFD)$ و $Q\in(HFD)$ و هذا يعني أن $(PQ)\subset(HFD)$ (2) بما أن $(EIJ)\neq(HFD)$ فان (من (1) و (2))

$(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$

3)لدينا $(BF)\parallel(IJ)$ و $(IJ)\subset(EIJ)$ و $(BF)\subset(HFD)$

و $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$ إذن $(PQ)\parallel(FB)$.

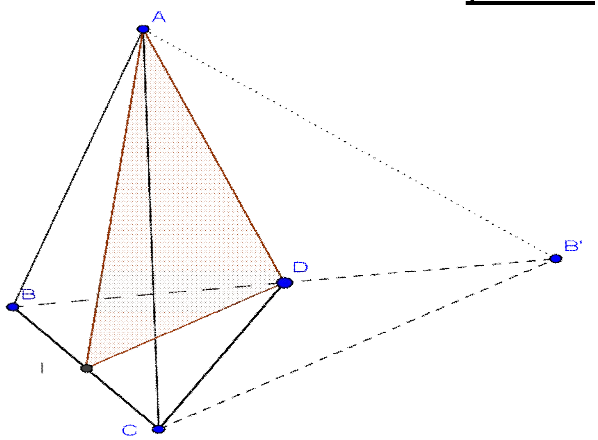
تمرين6:ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D.

1) أنشئ شكلا مناسبا.

2) بين أن $(CB')\parallel(AID)$

3) حدد تقاطع المستويين (AID) و $(AB'C)$.

الجواب1:



2)لدينا I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D .

إذن D منتصف $[BB']$

و منه $(ID)\parallel(B'C)$ و لدينا $(ID)\subset(AID)$

إذن $(CB')\parallel(AID)$

3)لدينا $A\in(AID)$ و $A\in(AB'C)$ و $(AID)\neq(AB'C)$

إذن المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A .

و بما أن $(ID)\subset(AID)$ و $(B'C)\subset(AB'C)$.

و أن $(B'C)\parallel(ID)$

فان المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A و يوازي $(B'C)$ و (ID).

تمرين7:ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا .

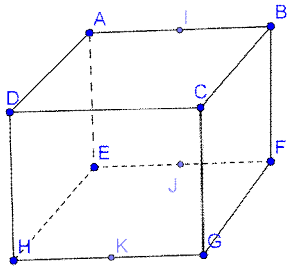
لتكن I, J و K منتصفات القطع $[AB]$, $[EF]$ و $[GH]$ على التوالي.

1) بين أن النقط B , C , J و K مستوائية.

2) بين أن I , B , H و K مستوائية.

3) بين أن $(IH)\parallel(KB)$.

4) استنتج أن $(IH)\parallel(JKC)$.



الجواب1) في المربع $EFGH$ لدينا I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $(EH)\parallel(JK)\parallel(FG)$

و نعلم أن $(FG)\parallel(BC)$ إذن $(JK)\parallel(BC)$

و منه فان النقط B , C , J و K مستوائية.

2)لدينا $(AB)\parallel(EF)$ و $(EF)\parallel(HG)$ إذن $(AB)\parallel(HG)$ و منه فان النقط A , B , G و H مستوائية.

و لدينا $I\in[AB]$ و $K\in[HG]$.

إذن النقط I , B , H و K مستوائية.

3) $AB=HG$ و I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $IB=HK$.

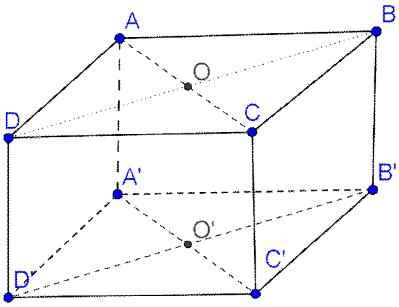
و نعلم أن $(IB)\parallel(HK)$

إذن الرباعي $IBKH$ متوازي أضلاع و منه فان $(IH)\parallel(KB)$

4)لدينا النقط B , C و I مستوائية.
و لدينا $(BK)\subset(JCK)$ و $(IH)\parallel(BK)$
إذن $(IH)\parallel(JKC)$.

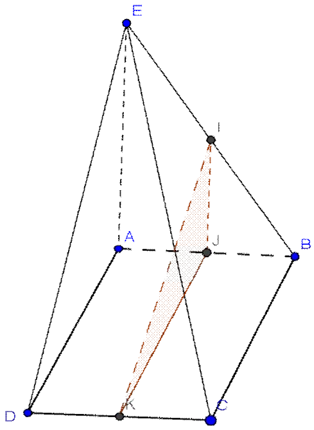
تمرين8: ليكن $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات.
و لتكن O و O' مركزي المستطيلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$ على التوالي.
1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن النقط A , A' , C و C' مستوائية.
بين أن B , B' , D و D' مستوائية.
3) بين أن $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$
4) بين أن $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$ و $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$.

الجواب1)



2)في المستطيل $AA'B'B$ لدينا $(AA')\parallel(BB')$ (1)
في المستطيل $BB'CC'$ لدينا $(BB')\parallel(CC')$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن $(AA')\parallel(CC')$
و منه فان النقط A , A' , C و C' مستوائية.
و بنفس الطريقة نبين أن: $(BB')\parallel(DD')$ و منه فان النقط B , B' , D و D' مستوائية.
3)لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ إذن $O\in(BD)$ و
منه $O\in(BB'D)$ و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(B'D')$ و
منه $O'\in(BB'D)$
ادن $(OO')\subset(BB'D)$ (α)
لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ اذن $O\in(AC)$ و منه $O\in(AA'C)$
و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(A'C')$ و
منه $O'\in(AA'C')$
إذن $(OO')\subset(AA'C)$ (β)
و لدينا $(AA'C)\neq(BB'D)$ (A , A' , B , B' , C و D نقط غير مستوائية).
و منه (α) و (β) نستنتج أن: $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$ هذا هو المطلوب
4)لدينا $(BB')\parallel(AA')$ و $(AA')\subset(AA'C)$ و $(BB')\subset(BB'D)$
و $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$
إذن $(OO')\parallel(AA')\parallel(BB')$
و بنفس الطريقة:
$(DD')\parallel(CC'')$ و $(DD')\subset(BB'D)$ و $(CC')\subset(ACC')$
و $(ACC')\cap(BB'D)=(OO')$
إذن $(OO')\parallel(CC')\parallel(DD')$.

تمرين9: ليكن $ABCD$ مربعا و E نقطة من الفضاء حيث:
$(AE)\perp(ABC)$
النقط I , J و K منتصفات القطع $[EB]$, $[AB]$ و $[DC]$
1) بين أن $(IJ)\parallel(ADE)$.
بين أن $(IJK)\parallel(ADE)$.
2) بين أن $(JK)\parallel(ABE)$.
3) حدد تقاطع المستويين (ABE) و (AIK).



الجواب1) لدينا في المثلث ABE
I منتصف $[EB]$ و J
منتصف $[AB]$ اذن $(IJ)\parallel(AE)$
و لدينا $(AE)\subset(ADE)$
إذن $(IJ)\parallel(ADE)$ (1)
و منه المطلوب.
لدينا K منتصف $[DC]$
إذن $(JK)\parallel(AD)\parallel(BC)$
و $(AD)\subset(ADE)$ اذن $(JK)\parallel(ADE)$ (2)
إذن(1) و(2) نستنتج أن: $(JIK)\parallel(ADE)$
و منه المطلوب.
2)لدينا $(AE)\perp(ABC)$
و $(JK)\subset(ABC)$ إذن $(AE)\perp(JK)$
و لدينا $(JK)\parallel(AD)$ و $(AD)\perp(AB)$
إذن $(JK)\parallel(AB)$
و منه فان (JK) عمودي على مستقيمين متقاطعين هما (AB) و (AE)
ضمن المستوى (ABE)
إذن $(JK)\perp(ABE)$
3)لدينا $(AIK)\neq(ABE)$ $(E\notin(ABC))$
لدينا $A\in(ABE)$ و $A\in(AIK)$
و $(EB)\subset(ABE)$ إذن $I\in(ABE)$ (لأن $I\in(EB)$)
لدينا $I\in(AIK)$
و منه $(AIK)\cap(ABE)=(AI)$.

تمارين للبحث

تمرين 1: ليكن $ABCD$ و $ABEF$ مربعان بحيث (AD) عمودي على (AF).

لتكن I و J مركزي المربعين $ABCD$ و $ABEF$ على التوالي. H المسقط العمودي للنقطة I على المستقيم (AB)

4) بين أن $(AD)\perp(ABE)$

استنتج أن $(IH)\perp(ABE)$

5) حدد تقاطع المستويين (ACE) و (BDF).

6) بين أن $(BCE)\parallel(IJH)$.

7) أحسب بدلالة a $(a=AD)$ حجم رباعي الأوجه $IAJB$.

تمرين 2: ليكن $ADIB$ رباعي أوجه بحيث يكون (AD) عموديا على المستوى (DIB) و لتكن E و F منتصفي القطعتين $[DI]$ و $[DB]$ على التوالي

1) بين أن $(IB)\parallel(AEF)$.

2) حدد تقاطع المستويين (AIB) و (AEF).

3) حدد تقاطع المستويين (ABE) و (AIF).

4) بين أن $(EB)\perp(AD)$.

تمرين 3: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه بحيث يكون (AB) عموديا على المستوى (BCD) و $CB=CD$ أنظر الشكل. لتكن I و J منتصفي القطعتين $[AD]$ و $[BD]$ على التوالي

1) حدد تقاطع المستويين (ABD) و (CIJ).

2) بين أن $(IJ)\parallel(ABC)$.

حدد تقاطع المستويين (ABC) و (CIJ).

3) بين أن $(CJ)\perp(ABD)$. وحدد طبيعة المثلث CIJ.

تمرين 4: ليكن $ABCDE$ هرما بحيث ADC مثلث قائم الزاوية في D و الرباعي $BCDE$ مربع (أنظر الشكل).

4) حدد المستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ACD) و (ABE).

5) حدد المستقيم (Δ') تقاطع المستويين (AED) و (ABC).

6) بين أن $(P)\perp(EBC)$.

7) ليكن (P) المستوى المحدد بالمستقيمين (Δ) و (Δ')

أ) بين أن $(P)\parallel(EBC)$.

ب) استنتج أن $(P)\parallel(AED)$.

تمرين 5: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا.

1) بين أن: $(EF)\parallel(ABH)$

2) بين أن $(ABH)\perp(CEF)$.

3) لتكن I منتصف القطعة $[BF]$. أثبت أن المستقيم (IH) يخترق المستوى (ABC).

4) ليكن $2cm$ طول الحرف المكعب $ABCDEFGH$, أحسب ب cm^3 حجم الهرم الذي رأسه I و قاعدته $ABCD$.

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien