

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad (3)$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3+3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

تمرين 6: نعتبر في الأساس (\vec{i}, \vec{j}) المتجهين $\vec{u}(3, -2)$ و $\vec{v}(-6, 4)$

هل \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين؟

الجواب: طريقة 1 : نحسب المحددة:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$$

ومنه \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين

طريقة 2: يعني $\vec{u}(3, -2) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

$$\vec{v}(-6, 4) = -6\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{v} = -6\vec{i} + 4\vec{j} = -2(3\vec{i} - 2\vec{j}) = -2\vec{u}$$

تمرين 7: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر النقط: $A(\frac{1}{2}, 3)$, $B(-2, -2)$, $C(14, 4)$ و المتجهة $\vec{u}(1, 3)$

1. حدد x بحيث \vec{u} و $\vec{v}(x-2, 5)$ مستقيمتان

2. بين أن النقط A و B و C مستقيمية

الجواب: (1) \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين يعني: $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

$$\text{يعني: } \begin{vmatrix} 1 & x-2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ يعني: } 5 \times 1 - 3(x-2) = 0$$

$$\text{يعني: } 5 - 3x + 6 = 0 \text{ يعني: } x = \frac{11}{3}$$

$$(2) \vec{AB} \left(-\frac{5}{2}; -5 \right) \text{ يعني } \vec{AB} \left(-2\frac{1}{2}; -2\frac{3}{2} \right)$$

$$\vec{AC} \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \text{ يعني } \vec{AC} \left(1\frac{1}{2}; 4\frac{3}{2} \right)$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$$

ومنه \vec{AB} و \vec{AC} مستقيمتين وبالتالي:

النقط A و B و C مستقيمية

تمرين 8: نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$

حدد متجهة موجهة ل (D)

الجواب: النقطتان $A(1; 0)$ و $B(0; -1)$ تنتميان إلى (D) .

إذن: $\vec{AB}(-1; -1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

تمرين 9: نعتبر النقطة $A(3; -5)$ و المتجهة $\vec{u}(-2; 3)$

حدد تمثيلاً بارامترى للمستقيم $(A; \vec{u})$

$$\text{الجواب: } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -5 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

تمرين 1: مثلث ABC مثلث ولتكن النقطة M بحيث $\vec{AM} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$

حدد زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AC})$

الجواب:

زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AC})$ هو $(3, -2)$.

تمرين 2: ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلماً إذا كانت $A(1, -4)$ و $B(-3, 7)$ نقطتين

حدد زوج إحداثيتي المتجهة \vec{AB} في الأساس (\vec{i}, \vec{j})

الجواب: $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ أي أن $\vec{AB}(-3-1, 7-(-4))$ وبالتالي

$$\vec{AB}(-4, 11)$$

$$\text{ومنه: } \vec{AB} = -4\vec{i} + 11\vec{j}$$

تمرين 3: نعتبر في الأساس (\vec{i}, \vec{j}) المتجهين $\vec{u}(3, -2)$ و $\vec{v}(-5, 1)$

حدد زوج إحداثيتي المتجهات التالية: $\vec{u} + \vec{v}$ و $5\vec{u}$ و $3\vec{u} - 2\vec{v}$

الأجوبة: $\vec{u}(3, -2)$ يعني $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

$$\vec{v}(-5, 1) \text{ يعني } \vec{v} = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{ومنه: } \vec{u} + \vec{v}(-2, -1) : \vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{i} + \vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{زوج إحداثيتي المتجهة } 5\vec{u} \text{ هو } (5 \times 3, 5 \times (-2)) \text{ أي } 5\vec{u}(15, -10)$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v}(19, -8) : 3\vec{u} - 2\vec{v} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{i} - 2\vec{j} = 19\vec{i} - 8\vec{j}$$

تمرين 4: ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلماً متعامداً ممنظماً. إذا كانت: $A(3, 1)$ و $B(-1, 2)$

1) حدد زوج إحداثيتي M منتصف القطعة $[AB]$

2) حدد المسافة بين النقطتين A و B

الجواب: (1) $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1; \frac{3}{2}\right)$

$$(2) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ أي أن } AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-1)^2}$$

$$AB = \sqrt{17} \text{ وبالتالي:}$$

تمرين 5: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر النقط: $A(1, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(3, -2)$ و $\vec{u}(-2, 3)$ و $\vec{v}(2, 4)$

1. حدد زوج إحداثيتي النقطة D حيث $\vec{AB} = \vec{BD}$

2. حدد زوج إحداثيتي I منتصف $[AB]$

3. أحسب المسافات التالية: AB و AC و BC

الأجوبة: (1) لدينا: $\vec{AB} = \vec{BD}$ ولدينا: $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

$$\vec{AB}(-3-1; -1-2) \text{ يعني } \vec{AB}(-4; -3)$$

$$\vec{BD}(x_D - x_B; y_D - y_B) \text{ يعني } \vec{BD}(x_D + 3; y_D + 1)$$

$$\text{ولدينا: } \vec{AB} = \vec{BD} \text{ إذن: } \begin{cases} x_D + 3 = -4 \\ y_D + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -7 \\ y_D = -4 \end{cases}$$

$$(2) I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ يعني } I\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2-1}{2}\right) \text{ يعني } I\left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

تمرين 10: في المستوى $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط: $B(3,7), A(-2,1)$

1. حدد تمثيلا باراميتريا للمستقيم (AB)

2. حدد نقط تقاطع المستقيم (AB) مع محوري المعلم

الجواب 1: $\overline{AB}(3+2; 7-1)$ يعني: $\overline{AB}(5; 6)$

المستقيم يمر من النقطة $A(-2; 1)$ و \overline{AB} موجهة له

$$\text{اذن: } (AB) \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 + 6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

2 أ) التقاطع مع محور الأفاسيل: $y = 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$

$x = 5t - 2$ يعني $x = -\frac{17}{6}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(-\frac{17}{6}, 0)$

ب) التقاطع مع محور الأرتيب: $x = 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$

$y = 6t + 1$ يعني $y = 6 \times \frac{2}{5} + 1 = \frac{17}{5}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $D(0, \frac{17}{5})$

تمرين 11: نعتبر في المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) النقط

$A(2; 4)$ و $B(5; -1)$ حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

الجواب: طريقة 1

$M(x, y) \in (AB)$ يعني \overline{AM} و \overline{AB} مستقيمتين

يعني $\det(\overline{AM}, \overline{AB}) = 0$ يعني $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-4 & -5 \end{vmatrix} = 0$ لأن: $\overline{AM}(x-2, y-4)$ و $\overline{AB}(3, -5)$

يعني $-5(x-2) - 3(y-4) = 0$ يعني $-5x + 10 - 3y + 12 = 0$

يعني $(AB) -5x - 3y + 22 = 0$

طريقة 2: نعلم أن معادلة مستقيم نكتب على الشكل $(AB) ax + by + c = 0$

ونعلم أن: $\overline{AB}(3, -5)$ متجهة موجهة له: $\overline{AB}(-b, a)$

اذن: $-b = 3$ و $a = -5$ اذن $a = -5$ و $b = -3$

ومنه: $(AB) -5x - 3y + c = 0$

يجب الآن البحث عن c نعلم أن: $A \in (AB)$ اذن احداثياته تحقق

المعادلة: $(AB) -5 \times 2 - 3 \times 4 + c = 0$ يعني $c = 22$

ومنه: $(AB) -5x - 3y + 22 = 0$

تمرين 12: نعتبر في المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) النقطة

$A(1; 2)$ و المتجهة $\vec{u}(-2; 1)$

1. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من النقطة:

$A(1; 2)$ و الموجه بالمتجهة \vec{u}

2. هل النقطة $B(0; 5)$ تنتمي للمستقيم (D) ؟

3. حدد نقطة أخرى تنتمي ل (D)

الجواب 1: طريقة 1: $M(x, y) \in (D)$: يعني \overline{AM} و \vec{u} مستقيمتين

يعني $\det(\overline{AM}, \vec{u}) = 0$ يعني $\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ لأن: $\overline{AM}(x-1, y-2)$

يعني $1(x-1) + 2(y-2) = 0$ يعني $x-1+2y-4=0$ يعني $x+2y-5=0$ (D)

طريقة 2: نعلم أن معادلة مستقيم نكتب على الشكل:

$(D) ax + by + c = 0$ ونعلم أن: $\vec{u}(-2, 1)$ متجهة موجهة له: $\vec{u}(-b, a)$

اذن: $-b = -2$ و $a = 1$ اذن $a = 1$ و $b = 2$

ومنه: $1x + 2y + c = 0$ يجب الآن البحث عن c

نعلم أن: $A \in (AB)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة: $2+4+c=0$

يعني: $c = -5$ ومنه: $(D) x + 2y - 5 = 0$

2) $B(0,5)$ ؟؟؟؟ نعوض باحداثيات النقطة B في معادلة المستقيم (D)

$0 + 2 \times 5 - 5 = 10 - 5 = 5 \neq 0$ اذن: $B \notin (D)$

3) نعطي للمتغير x قيمة ونبحث عن y في معادلة (D) أو العكس

مثلا: نضع $x = 1$ يعني $2y = 4$ يعني $y = 2$ ومنه: $C(1; 2) \in (D)$

تمرين 13: نعتبر في المعلم المتعامد المنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) المستقيم

(D) الذي معادلته: $2x - 5y + 4 = 0$

1. حدد متجهة موجهة بالمتجهة للمستقيم (D)

2. أرسم المستقيم (D)

الجواب 1: $ax + by + c = 0$ $2x - 5y + 4 = 0$

اذن: $a = 2$ و $a = -5$ ومنه: $\vec{u}(-b, a) \Leftrightarrow \vec{u}(5, 2)$ موجه ل (D)

تمرين 14: نعتبر المستقيمين $(D): x - 2y + 6 = 0$ و $(D'): -2x + 4y + 1 = 0$

بين $(D) \parallel (D')$

الجواب: $(-2) \times (-2) - 4 \times 1 = 4 - 4 = 0$ اذن: $(D) \parallel (D')$

تمرين 15: نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد

منظم المستقيمتين: $(D_1): 6x + 3y + 2 = 0$ و $(D_2): 3x - 2y - 1 = 0$

و النقط التالية: $A(1, 2)$ و $B(3, -2)$

1. بين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان و حدد نقطة تقاطعهما

2. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

3. حدد الوضع النسبي للمستقيمين (D_1) و (AB) .

4. حدد تمثيلا باراميتريا للمستقيم (Δ) المار من $C(1, 2)$

و الموازي للمستقيم (D_1) .

الجواب 1: $(6) \times (-2) - 3 \times 3 = -12 - 9 = -21 \neq 0$ اذن: (D_1) و (D_2) متقاطعان

لتحديد نقطة التقاطع نحل النظام التالية: $\begin{cases} 6x + 3y + 2 = 0 \\ 3x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ (1) ونستعمل احدى الطرق لحل هذه النظام

محددة النظام (1) هي: $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$ و منه النظام تقبل حلا وحيدا: هو

$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{-21}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4}{-21}$ ومنه نقطة التقاطع: $H(-\frac{1}{21}; \frac{4}{7})$

2) نعلم أن معادلة مستقيم (AB) نكتب على الشكل: $ax + by + c = 0$

ونعلم أن: $\overline{AB}(2, -4)$ متجهة موجهة له: $\overline{AB}(-b, a)$

اذن: $-b = 2$ و $a = -4$ اذن $a = -4$ و $b = -2$ ومنه: $-4x - 2y + c = 0$

يجب الآن البحث عن c نعلم أن: $A \in (AB)$ اذن احداثياته تحقق:

المعادلة: $-4 - 4 + c = 0$ يعني: $c = 8$ ومنه: $-4x - 2y + 8 = 0$

يعني: $-2(2x + y - 4) = 0$ يعني: $(AB) 2x + y - 4 = 0$

3) $(D_1): 6x + 3y + 2 = 0$ و $(D_2): 3x - 2y - 1 = 0$

اذن: $(6) \times (1) - 3 \times 2 = 6 - 6 = 0$ متوازيين

4) (Δ) يوازي للمستقيم (D_1) يعني المتجهة الموجهة ل (D_1)

هي أيضا موجهة ل (Δ)

اذن: $\vec{u}(-b, a)$ أي $\vec{u}(-3, 6)$ موجه ل $(D_1): 6x + 3y + 2 = 0$

تمارين للبحث

تمرين 1: في المستوى نعتبر النقط: $A(-2,1)$, $B(2,4)$, $\vec{u}(5,2)$ و

$$(D_m): (m-1)x - 2my + 3 = 0 \text{ و } (D): 2x - 3y + 1 = 0$$

1. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من A والموجه بالمتجهة \vec{u}
2. تأكد أن (D) و (Δ) متقاطعان و حدد تقاطعهما
3. حدد m حيث $(D) \parallel (D_m)$
4. حدد m حيث $(D) \perp (D_m)$
5. أنشئ المستقيمت: $(D_2), (D_1), (D_0)$
6. بين أن جميع المستقيمت (D_m) تمر من النقطة $C(3, \frac{3}{2})$



تمرين 2: نعتبر النقط: $A(2,6)$, $C(4,0)$.

1. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)
2. نعتبر المستقيم (Δ) الذي إحدى تمثيلات الباراميتريه هي

$$\begin{cases} x = \frac{11}{2} + \frac{5}{2}t \\ y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

- تحقق أن $x - 5y + 12 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ)
3. حدد زوج إحداثيات النقطة I تقاطع (Δ) و (AC)
4. تحقق أن النقطة I منتصف القطعة $[AC]$

تمرين 3: نعتبر المستقيمين $(D): \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \end{cases}$ و $(D'): y=-2$

1. حدد تقاطع (D) مع محور الأفصلي
 2. حدد تقاطع (D') مع محور الأرتيب
 3. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) و تمثيلا باراميتريال (D')
 4. حدد إحداثيات النقطة I تقاطع (D) و (D')
 5. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من $A(-1,1)$ و الموجه ب \vec{i}
 6. بين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان
- تمرين 4:** نعتبر المستقيم $(\Delta): 2x - y + 2 = 0$ و النقط:

$$C(-2, -2), B(4, -2), A(3, 2)$$

1. حدد إحداثيات النقطة I تقاطع (Δ) مع محور الأرتيب
2. بين أن (AI) و (BC) متوازيان
3. أوجد معادلة ديكارتية ل (AB)
4. بين أن (Δ) و (AB) يتقاطعان في $E(2, 6)$
5. لتكن M_1 و M_2 على التوالي منتصف $[AI]$ و $[BC]$

حدد زوج إحداثيات كل من M_1 و M_2

6. بين أن E و M_1 و M_2 مستقيمية

وبما أن (Δ) يمر من $C(1,2)$ فان: $(\Delta) \begin{cases} x=1-3t \\ y=2+6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

تمرين 16: نعتبر المستقيمين $(D): 3x - 5y + 6 = 0$ و $(D'): x - y = 0$

1. حدد تمثيلا باراميتريال لكل من المستقيم (D) و (D')
2. حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من $B(1,0)$ و الموازي ل (EC) حيث $E(3,3)$ و $C(4,0)$
3. حدد إحداثيات النقط I تقاطع (Δ) و (D) و إحداثيات النقطة J تقاطع (Δ) و (D')
4. بين أن J منتصف $[IB]$

أجوبة: (1) أ) متجهة موجهة ل $(D): 3x - 5y + 6 = 0$ هي: $\vec{u}(-b, a)$ أي: $\vec{u}(5, 3)$
نحدد نقطة يمر منها المستقيم (D) :

نضع مثلا: $x=0$ اذن: $(D): 3 \times 0 - 5y + 6 = 0$

$$(D) \begin{cases} x=0+5t \\ y=\frac{6}{5}+3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ ومنه فان: } I(0, \frac{6}{5}) \in (D) \text{ ومنه } y = \frac{6}{5}$$

ب) متجهة موجهة ل $(D): x - y = 0$ هي: $\vec{u}(-b, a)$ أي: $\vec{u}(1, 1)$
نحدد نقطة يمر منها المستقيم (D')

نضع مثلا: $x=0$ اذن: $(D'): 0 - y = 0$

يعني $y=0$ ومنه $O(0,0) \in (D')$

ومنه فان: $(D') \begin{cases} x=0+1k \\ y=0+1k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$

2) (Δ) يمر من B و يوازي ل (EC) اذن: \overline{EC} متجهة موجهة ل (Δ) ولدينا: $\overline{EC}(1; -3)$ وبالمقارنة مع: $\overline{EC}(-b, a)$ نجد: $b=-1$ و $a=-3$ ومنه: $-3x - y + c = 0$

ونعلم أن: (Δ) يمر من $B(1,0)$ اذن احداثياته تحقق:

المعادلة: $-3+0+c=0$ يعني: $c=3$ ومنه: $(\Delta) -3x - y + 3 = 0$

أ) 3) إحداثيات I تقاطع (Δ) و (D)

$$(1) \begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \\ -3x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

ونستعمل احدي الطرق لحل هذه النظمة

نجمع المعادلتين طرف ل طرف فنجد: $-6y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

وبالتعويض في المعادلة نجد: $-3x - \frac{3}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow -3x = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

و منه نقطة التقاطع: $I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

3) ب) إحداثيات J تقاطع (Δ) و (D')

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -3x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

نحل النظمة التالية:

$x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ وبالتعويض في المعادلة الأخرى نجد:

$$-3x - x + 3 = 0 \Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$$

4) نبين أن J منتصف $[IB]$

يكفي أن نبين أن: $\overline{IJ} = \overline{JB}$

لدينا: $\overline{IJ}(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ ولدينا $\overline{JB}(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ اذن: $\overline{IJ} = \overline{JB}$ ومنه J منتصف $[IB]$