

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 + 2(-\frac{3}{2}) + 3^2 = 25 - 3 + 9 = 31$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 2(-\frac{3}{2}) + 3^2 = 25 + 3 + 9 = 37$$

$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 3\vec{u} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot 5\vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot 5\vec{v}$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 3\vec{u}^2 + 15\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 10\vec{v}^2 = 3 \times 25 + 13\vec{u} \cdot \vec{v} - 10 \times 9$$

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) = 75 + 13(-\frac{3}{2}) - 90 = -15 - \frac{39}{2} = -\frac{69}{2}$$

$$(5\vec{u} - \vec{v}) \cdot (5\vec{u} + \vec{v}) = (5\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25(\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25 \times 25 - 9 = 616$$

تمرين 6: ليكن ABC مثلثا قائما في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

$$AC \times AB = AH \times BC \quad (2) \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (1) \quad \text{بين أن:}$$

$$CA^2 = CH \times BC \quad (3)$$

$$BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2 = \overline{BA}^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC} + \overline{AC}^2 \quad (1) \quad \text{الأجوبة:}$$

لدينا $\overline{BA} \perp \overline{AC}$ لأن ABC قائما في A إذن: $BC^2 = BA^2 + AC^2$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} : (ABC) \quad \text{باعتبار المثلث:}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} : (ABH) \quad \text{و باعتبار المثلث:}$$

$$\text{ومنه } \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \quad \text{ومنه } AC \times AB = AH \times BC$$

(3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} : (ABC) \quad \text{باعتبار المثلث:}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} : (ABH) \quad \text{و باعتبار المثلث:}$$

$$\text{ومنه } \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AB} \quad \text{ومنه } AC^2 = CH \times BC$$

تمرين 7: مثلث ABC قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) . أحسب: AC و BH و AH و HC

$$\text{علما أن: } AB = 2\text{cm} \quad \text{و } BC = 5\text{cm}$$

الجواب: بحسب ميرهنه فيثاغورس المباشرة فان: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{يعني: } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 21 \quad \text{يعني: } AC = \sqrt{21}\text{cm}$$

$$\text{وحسب العلاقات المترية لدينا: } AB^2 = BH \times BC$$

$$\text{يعني: } BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4}{5}\text{cm}$$

$$\text{ولدينا: } AC^2 = CH \times CB \quad \text{يعني: } CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{21}{5}\text{cm}$$

تمرين 1: ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين \vec{u} و \vec{v}

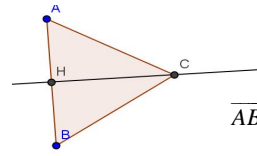
$$\text{حيث: } \|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad \text{و } \|\vec{v}\| = 4 \quad \text{أحسب } \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{الجواب: } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

تمرين 2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

$$\text{أحسب } \overline{CH} \cdot \overline{HB} \quad \text{و } \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فان كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\frac{\pi}{3}$ ومنه:



$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$$

$$\overline{CH} \cdot \overline{HB} = \|\overline{CH}\| \times \|\overline{HB}\| \times \cos \hat{H} = CH \times HB \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = CH \times HB \times 0 = 0$$

تمرين 3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF = 5$ و $EG = 3$

$$\text{و } \overline{EF} \cdot \overline{EG} = -6 \quad \text{أحسب } \cos(\widehat{FEG})$$

$$\text{الجواب: } \overline{EF} \cdot \overline{EG} = \|\overline{EF}\| \times \|\overline{EG}\| \cos(\widehat{FEG}) = -6$$

$$\text{يعني } 5 \times 3 \cos(\widehat{FEG}) = -6 \quad \text{يعني } EF \times EG \cos(\widehat{FEG}) = -6$$

$$\text{يعني } \cos(\widehat{FEG}) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

تمرين 4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 3$ و $AC = 4$

$$\text{و } \widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{أحسب } \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{الجواب: } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times 3 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

لأن: $\cos(\pi - x) = -\cos x$ إذن:

تمرين 5: لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = 3$

$$\text{و } \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{3}{2} \quad \text{أحسب } \vec{v}^2 \quad \text{و } \vec{u}^2 \quad \text{و } (\vec{u} + \vec{v})^2 \quad \text{و } (\vec{u} - \vec{v})^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) \quad \text{و } (3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 5\vec{v}) \quad \text{و } (5\vec{u} - \vec{v}) \cdot (5\vec{u} + \vec{v})$$

$$\text{الجواب: } \vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 3^2 = 9 \quad \text{و } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 5^2 = 25$$

تمرين 8: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ و $AC = 8$ و

$AB = 5$

(1) أحسب \widehat{ACB} (2) حساب BC

(الجواب 1): حساب BC

حساب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC}$

يعني: $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \widehat{BAC}$

يعني: $BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\frac{3\pi - \pi}{3} \right)$ يعني $BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right)$

يعني: $BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$ يعني $BC^2 = 89 - 80 \cos \left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right)$

يعني: $BC^2 = 89 - 80 \left(-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$ لأن $\cos(\pi - x) = -\cos x$

يعني: $BC^2 = 89 + 80 \left(\frac{1}{2} \right)$ يعني $BC^2 = 89 + 40$ يعني $BC^2 = 129$

يعني: $BC = \sqrt{129}$

(2) حساب \widehat{ACB}

حساب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \widehat{ACB}$

يعني: $5^2 = 8^2 + (\sqrt{129})^2 - 2 \times 8 \times \sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$

يعني: $25 = 64 + 129 - 16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$

يعني: $25 - 193 = -16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$

يعني: $-168 = -16\sqrt{129} \cos \widehat{ACB}$ يعني

$\cos \widehat{ACB} = \frac{-168}{-16\sqrt{129}} = \frac{168\sqrt{129}}{2064} = \frac{21\sqrt{129}}{258} = \frac{7\sqrt{129}}{86}$

تمرين 9: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 4\text{cm}$ و

$AB = 3\text{cm}$ و لتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI .

(الجواب): حساب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ يعني $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

يعني: $37 = 2AI^2$ يعني $45 - 8 = 2AI^2$ يعني $9 + 36 = 2AI^2 + \frac{16}{2}$

يعني: $AI^2 = \frac{37}{2}$ يعني $AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$

تمرين 10: ليكن ABM مثلثا بحيث: $AM = 3\text{cm}$ و $AB = 4\text{cm}$ و

$BM = 4\text{cm}$ و

و لتكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$

أحسب المسافات MI و AK و BJ

(الجواب): حساب MI : حساب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$3^2 + 4^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}4^2$ يعني $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

يعني: $17 = 2MI^2$ يعني $25 - 8 = 2MI^2$ يعني $9 + 16 = 2MI^2 + \frac{16}{2}$

يعني: $MI^2 = \frac{17}{2}$ يعني $MI = \sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب AK : حساب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$2^2 + 3^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}4^2$ يعني $AB^2 + AM^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BM^2$

يعني: $17 = 2AK^2$ يعني $25 - 8 = 2AK^2$

يعني: $AK^2 = \frac{17}{2}$ يعني $AK = \sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب BJ : حساب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$4^2 + 4^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}3^2$ يعني $AB^2 + BM^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AM^2$

يعني: $32 - \frac{9}{2} = 2BJ^2$ يعني $55 = 2BJ^2$

يعني: $BJ^2 = \frac{55}{4}$ يعني $BJ = \sqrt{\frac{55}{4}}$

تمرين 11: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB = 1$ و $AC = \sqrt{2}$ و

$CB = 2$ و لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

(1) بين أن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ واستنتج \widehat{A}

(2) اكتب: \overrightarrow{AD} بدلالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC}

(3) أحسب $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

(4) أحسب AD

(5) ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

أحسب AI و BJ

(الجواب 1): حساب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{A} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$

اذن: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

بالتعويض نجد: $2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

يعني: $4 - 1 - 2 = -2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ يعني $1 = 2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

يعني: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$

استنتج: \widehat{A} : لدينا: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$ يعني

$-\frac{1}{2} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos \widehat{A}$ يعني: $-\frac{1}{2} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$

$\cos \widehat{A} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$ يعني $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ يعني $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{DA}$

يعني: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

(3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

ومنه: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ وبالتالي $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ أي: ABD قائم الزاوية في A

(4) لدينا: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$ اذن: $\overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})\right)^2$

اذن: $AD^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{9}(AB^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4AC^2)$

اذن: $AD = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ اذن: $AD^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$

(5) حساب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$1^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2$ يعني $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

يعني: $2 = 2AI^2 + 2 - 2 = 2AI^2$ يعني $3 = 2AI^2$ يعني $1 = 2AI^2$

ب. بين أن $(MD) \perp (AC)$

الجواب (1): حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}1^2 \text{ يعني } BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\frac{7}{4} = CI^2 \text{ يعني } \frac{7}{2} = 2CI^2 \text{ يعني } 4 = 2CI^2 + \frac{1}{2} \text{ يعني}$$

$$CI = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ يعني}$$

$$\overline{DA} + \overline{AB} - 2(\overline{DA} + \overline{AC}) = \overline{0} \text{ يعني } \overline{DB} - 2\overline{DC} = \overline{0} \quad (2)$$

$$-\overline{DA} + \overline{AB} - 2\overline{AC} = \overline{0} \text{ يعني } \overline{DA} + \overline{AB} - 2\overline{DA} - 2\overline{AC} = \overline{0} \text{ يعني}$$

$$\overline{AD} = -\overline{AB} + 2\overline{AC} = 2\overline{AC} - \overline{AB} \text{ يعني}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AI} + \overline{IC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AI} + \overline{AB} \cdot \overline{IC} \quad (3)$$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

$$\overline{AB} \cdot \overline{IC} = 0 \text{ ومنه } \overline{AB} \perp \overline{IC} \text{ أي } (IC) \perp (AB) \text{ ومنه}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} \text{ وبالتالي}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} = \|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AI}\| \cos 0 = AB \cdot AI \cdot 1 = AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 0 \quad (4)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AB \times AC \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \text{ يعني } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \text{ وحدها } \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ يعني } \cos \hat{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ يعني } 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \text{ يعني}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (2\overline{AC} - \overline{AB}) \text{ اذن } \overline{AD} = 2\overline{AC} - \overline{AB} \text{ وحدها } \quad (5)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (2\overline{AC} - \overline{AB}) \text{ يعني } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB} \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{AB} \perp \overline{AD} \text{ أي } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2 \times \frac{1}{2} - AB^2 = 1 - 1 = 0$$

ومنه BAD قائم الزاوية في A

$$-3\overline{MA} + 7(\overline{MA} + \overline{AC}) = \overline{0} \text{ يعني } -3\overline{MA} + 7\overline{MC} = \overline{0} \quad (6)$$

$$3\overline{AM} - 7\overline{AM} + 7\overline{AC} = \overline{0} \text{ يعني } -3\overline{MA} + 7\overline{MA} + 7\overline{AC} = \overline{0} \text{ يعني}$$

$$\overline{AM} = \frac{7}{4}\overline{AC} \text{ يعني } -4\overline{AM} = -7\overline{AC}$$

حساب $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$ ؟؟؟؟

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = (2\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{AC} = 2\overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2AC^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} \text{ يعني } \overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2AC^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ يعني}$$

$$\overline{MD} \cdot \overline{AC} = (\overline{MA} + \overline{AD}) \cdot \overline{AC} = \overline{MA} \cdot \overline{AC} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} \quad (6)$$

$$\overline{MD} \cdot \overline{AC} = -\overline{AM} \cdot \overline{AC} + \frac{7}{2}$$

$$\overline{MD} \perp \overline{AC} \text{ أي } \overline{MD} \cdot \overline{AC} = -\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

ومنه $(MD) \perp (AC)$

تمرين 14: ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين

$$AB = \sqrt{2} \text{ بحيث}$$

ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)

$$(1) \text{ أحسب: } \overline{BC} \cdot \overline{BD} \text{ و } \overline{BA} \cdot \overline{BD}$$

$$(2) \text{ أحسب: } DC \text{ و } AC$$

$$\text{يعني } AI^2 = \frac{1}{2} \text{ يعني } AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$$1^2 + 2^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 \text{ يعني } BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$4 = 2BI^2 \text{ يعني } 5 - 1 = 2BI^2 \text{ يعني } 5 = 2BI^2 + 1 \text{ يعني}$$

$$BI = \sqrt{2} \text{ يعني } BI^2 = 2$$

تمرين 12: ليكن ABC مثلثا بحيث $BC = 3$ و $AC = 2$ و $AB = \sqrt{7}$ و I منتصف القطعة $[BC]$

(1) باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(\widehat{BAC})$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \text{ أن أثبت أن}$$

(ج) أحسب AI

$$(2) \text{ نعتبر النقطة } M \text{ بحيث } \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$$

(أ) أحسب $\overline{AM} \cdot \overline{AC}$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AC} = 0 \text{ بين أن}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الجواب (1): حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$\text{لدينا: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$\text{بالتعويض نجد: } 9 = 4 + 7 - 4\sqrt{7} \cos(\hat{A})$$

$$\text{يعني: } -2 = -4\sqrt{7} \cos(\hat{A}) \text{ يعني}$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

(ب) لدينا: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$ يعني

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{(\sqrt{7})^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

(ج) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2 \text{ يعني } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$\text{يعني: } 11 = 2AI^2 + \frac{9}{2} \text{ يعني } 13 = 2AI^2 \text{ يعني } AI^2 = \frac{13}{2} \text{ يعني } AI = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$(2) \overline{AM} \cdot \overline{AC} = \left(\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}\right) \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{6}\overline{AC} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6}\overline{AC}^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}AC^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$(ب) \overline{MB} \cdot \overline{AC} = (\overline{MA} + \overline{AB}) \cdot \overline{AC} = \overline{MA} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AC} = -\overline{AM} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1 + 1 = 0$$

ومنه: $\overline{MB} \perp \overline{AC}$ وبالتالي $(MB) \perp (AC)$

تمرين 13: ليكن ABC مثلثا بحيث $BC = AC = \sqrt{2}$ و $AB = 1$

و D نقطة بحيث $\overline{DB} - 2\overline{DC} = \overline{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI

2. عبر عن \overline{AD} بدلالة \overline{AB} و \overline{AC}

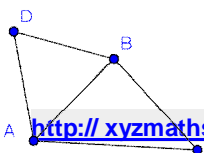
3. بين أن $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}$

4. استنتج أن $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}$ و استنتج $\cos \widehat{BAC}$

5. أحسب $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD

6. نعتبر النقطة M حيث $-3\overline{MA} + 7\overline{MC} = \overline{0}$

أ. عبر عن \overline{AM} بدلالة \overline{AC} و أحسب $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$



$$AB^2 \times \frac{1}{4} = 16 \text{ يعني } AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16 \text{ يعني}$$

$$AB = 8 \text{ يعني } AB^2 = 64$$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A} \text{ لدينا}$$

$$BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$$

$$BC = \sqrt{96} \text{ يعني } BC^2 = 96$$

$$\overline{BI} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4} \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{3}{4} \overline{BA}^2 = \frac{3}{4} \overline{BA}^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48 \text{ (3)}$$

$$\overline{EB} \cdot \overline{AB} = (\overline{EI} + \overline{IB}) \cdot \overline{AB} = \overline{EI} \cdot \overline{AB} + \overline{IB} \cdot \overline{AB} \text{ (4)}$$

$$\overline{EI} \perp \overline{AB} : \text{ لأن } \overline{EI} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ لدينا}$$

$$\overline{EB} \cdot \overline{AB} = \overline{IB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BI}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BI} \cdot \overline{BA} = 48 : \text{ ومنه}$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} \sqrt{96}^2 : \text{ يعني } AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

$$40 = AJ^2 : \text{ يعني } 80 = 2AJ^2 : \text{ يعني } 128 = 2AJ^2 + 48$$

$$AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} : \text{ يعني}$$

تمرين 16: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

$$\text{بحيث: } \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12 \text{ و } \cos(\hat{ABC}) = \frac{1}{3}$$

و J نقطة بحيث $\overline{BJ} = \frac{5}{4} \overline{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث: $M \in (\Delta)$

1. أرسم شكلا تقريبا

2. بين أن: $AB = 6$ وأحسب AC

3. أحسب: $\overline{BJ} \cdot \overline{BA}$

4. بين أن: $\overline{MB} \cdot \overline{AB} = 45$

5. أحسب: BI

(الجواب 1)

(2) لدينا $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 12$ يعني

$$\|\overline{BA}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos \hat{B} = 12$$

$$AB^2 \times \frac{1}{3} = 12 \text{ يعني } BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12 \text{ يعني}$$

$$AB = 6 \text{ يعني } AB^2 = 36$$

(ب) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \hat{B} \text{ لدينا}$$

$$AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$$

$$AC = \sqrt{54} \text{ يعني } AC^2 = 54$$

$$\overline{BJ} \cdot \overline{BA} = \frac{5}{4} \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \frac{5}{4} \overline{BA}^2 = \frac{5}{4} \times 36 = 45 \text{ (3)}$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AB} = (\overline{MJ} + \overline{JB}) \cdot \overline{AB} = \overline{MJ} \cdot \overline{AB} + \overline{JB} \cdot \overline{AB} \text{ (4)}$$

$$\overline{MJ} \perp \overline{AB} : \text{ لأن } \overline{MJ} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ لدينا}$$

$$\overline{MB} \cdot \overline{AB} = \overline{JB} \cdot \overline{AB} = (-\overline{BJ}) \cdot (-\overline{BA}) = \overline{BJ} \cdot \overline{BA} = 45 : \text{ ومنه}$$

(5) حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$$6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} \sqrt{54}^2 : \text{ يعني } AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} AC^2$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 1 - \sqrt{3} \text{ أن (3)}$$

$$\widehat{DAC} = \frac{7\pi}{12} \text{ تحقق من أن (4)}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ استنتج أن (5)}$$

(الجواب 1)

$$\overline{BA} \cdot \overline{BD} = \|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BD}\| \cos \hat{ABD} = AB \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \|\overline{BC}\| \cdot \|\overline{BD}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = (\sqrt{2})^2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

(2) حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان: $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$$AC = 2 \text{ يعني } AC^2 = 4 \text{ يعني } AC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$$DC^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 2 + 2 - 2 \times 2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 4 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 4 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$DC = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \text{ يعني}$$

(3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \cos(\alpha)$$

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$\left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \right)^2 = 4 + 2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 - 2\overline{AC} \times \overline{AD} \text{ يعني}$$

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$\widehat{DAC} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \text{ (4)}$$

(5) وجدنا: $\overline{AC} \times \overline{AD} = 1 - \sqrt{3}$

$$AC \times AD \times \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3} \text{ يعني}$$

$$\text{يعني: } 2 \times \sqrt{2} \times \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3}$$

$$\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

تمرين 15: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{1}{4} \text{ و } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16$$

و I نقطة بحيث $\overline{BI} = \frac{3}{4} \overline{BA}$ و J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من I والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة E بحيث: $E \in (\Delta)$

(1) أرسم شكلا تقريبا

(2) بين أن: $AB = 8$ وأحسب BC

(3) أحسب: $\overline{BI} \cdot \overline{BA}$

(4) بين أن: $\overline{EB} \cdot \overline{AB} = 48$

(5) أحسب: AJ

(الجواب 1)

(2) لدينا $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16$ يعني

$$AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$$

$$BI^2 = \frac{45}{2} : \text{يعني } 45 = 2BI^2 : \text{يعني } 72 = 2BI^2 + 27 : \text{يعني}$$

$$BI = \sqrt{\frac{45}{2}} : \text{يعني}$$