أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين 1 : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}$

اذن : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{1}{101\times102}\in\mathbb{R}^+$ ومنه $\frac{101}{102}\ge\frac{100}{101}$

تمرين 2 : قارن : a و b و نضع $a=2+\sqrt{3}$ و $b=2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a-b=2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا

أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$ فان: $a\succ b$

تمرين3: $a\in\mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب : $(a^2+1)-2a=a^2-2a+1=(a-1)^2\ge0$

ومنه $a^2+1\ge2a$ مهما يكن : $a\in\mathbb{R}$

تمرين 4: قارن العددين: $a=\sqrt{6}$ و $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

الجواب: نحسب الفرق :

$$a-b=\sqrt{6}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{3\times2}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)$$

$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$ التعميل ب $\sqrt{3}$

$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$ التعميل ب $\left(\sqrt{2}-1\right)$

لدينا : $\sqrt{2}>1$ لأن : $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ و $(1)^2=1$ ومنه $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{3}>1$ لأن : $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ و $(1)^2=1$ ومنه $\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a>b$

تمرين 5 : قارن العددين: $a=\sqrt{10}$ و $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$

الجواب: نحسب الفرق :

$$a-b=\sqrt{10}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{5\times2}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)$$

$a-b=\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+1=\sqrt{5}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$ التعميل ب $\sqrt{5}$

$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$ التعميل ب $\left(\sqrt{2}-1\right)$

لدينا : $\sqrt{2}>1$ لأن : $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ و $(1)^2=1$ ومنه $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $\sqrt{5}>1$ لأن : $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ و $(1)^2=1$ ومنه $\left(\sqrt{5}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a>b$

تمرين 6: قارن العددين: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

الجواب: نحسب الفرق : $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(2\sqrt{3}+2-\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\right)-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

لدينا : $3\sqrt{3}>5$ لأن : $\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$ و $(5)^2=25$ ومنه

$3\sqrt{3}-5\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي : $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}>\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

تمرين 7: ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$.

نضع: $x=\frac{7a+2b}{7a}$ و $y=\frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y .

الجواب: نحسب الفرق : $x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

$$x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times8b}{7a(7a+2b)}=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times7a\times2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^+$$

لأن: $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^+$ و $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي : $x\ge y$

تمرين 8: ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

1. قارن العددين: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$
2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$.

الجواب:(1 x عنصرا من $\mathbb{R}^+$ يعني $x\ge0$

لدينا $x+2\ge x$ لأن : $(x+2)-x\ge0$

اذن : $\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x}$ واضافة $\sqrt{x+1}$ نجد النتيجة المطلوبة:

أي أن : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2)الاستنتاج :

بضربنا في المرافق نجد المتساوية التالية :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

أي أن :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

ولدينا أيضا : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

أي أن : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

وبما أن : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ فان :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\le\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

اذن نستنتج أن : : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

<u>تمرين 9</u>: ليكن x عددا حقيقيا موجبا.

قارن العددين: x و $2\sqrt{x}-1$.

<u>الجواب:</u> $x-(2\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\times1+1^2=(\sqrt{x}-1)^2\ge0$

ومنه $x\ge(2\sqrt{x}-1)$ مهما يكن : $x\in\mathbb{R}^+$

<u>تمرين 10</u>: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نضع: $a=\sqrt{4n^2+1}$ و $b=2n+1$ قارن العددين a و b.

<u>الجواب:</u> لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$a^2=(\sqrt{4n^2+1})^2=4n^2+1$

$b^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

$b^2-a^2=4n^2+4n+1-(4n^2+1)=4n^2+4n+1-4n^2-1$

$b^2-a^2=4n\ge0$

ومنه $b^2\ge a^2$ اذن نستنتج أن $b\ge a$ مهما يكن : $x\in\mathbb{N}$

<u>تمرين 11</u>: ليكن x و y عددين حقيقي بحيث: $x<y<3$

1. بين أن: $x+y-6\prec0$
2. قارن العددين $a=x^2-6x+1$ و $b=y^2-6y+1$.

<u>الجواب:</u>

1)لدينا $x<y<3$ اذن $x<3$ و $y<3$ ومنه $x+y<6$

وبالتالي: $x+y-6<0$

2)**:** نحسب الفرق : $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

لدينا $x<y$ اذن $x-y\in\mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

ومنه $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$ أي : $a-b\in\mathbb{R}^+$ وبالتالي: $a\ge b$

<u>تمرين12</u>: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J

حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

1) $J=[-1,+\infty[$ و $I=]-3,7]$

2) $J=[4;10]$ و $I=]-\infty,5[$

3) $J=[-5;-1]$ و $I=[0,10[$

4) $J=]-1,\frac{3}{2}[$ و $I=[\frac{-2}{3},2]$

<u>الجواب:</u>

1) $I\cap J=]-1,7]$ $\quad I\cup J=]-3;+\infty[$

2) $I\cap J=[4,5[$ $\quad I\cup J=]-\infty;10]$

3) $I\cap J=\varnothing$ $\quad I\cup J=[-5;10]$

4) $I\cap J=[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}[$ $\quad I\cup J=]-1,2]$

<u>تمرين13</u> : حل في IR النظمات الآتية

1) $\begin{cases}x>5\\x\le4\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\ge-3\\x>2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x>7\\x\ge0\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-3\le x\le0\\-7<x<10\end{cases}$

<u>الجواب: الرمز</u> { يعني التقاطع

1) $x>5$ يعني $x\in]5,+\infty[$

$x\le4$ يعني $x\in]-\infty,4]$

$S=]5,+\infty[\cap]-\infty,4]=\varnothing$

2) $x\ge-3$ يعني $x\in[-3,+\infty[$

$x>2$ يعني $x\in]2,+\infty[$

$S=]2,+\infty[\cap[-3,+\infty[=]2,+\infty[$

3) $x>7$ يعني $x\in]7,+\infty[$

$x\ge0$ يعني $x\in[0,+\infty[$

$S=]7,+\infty[\cap[0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $-7<x<10$ يعني $x\in]-7;10[$

$-3\le x\le0$ يعني $x\in[-3;0]$

$S=]-7,10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

<u>تمرين14</u>: نضع $x\in[1;3]$ و $y\in[2;4]$ اعط تأطيرا للأعداد التالية

1)اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$

و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$

2)حدد سعة التأطير لكل من A و B : $A=x^2+y^2+2x-3y$ و $B=\frac{2x-1}{x+1}$

<u>الجواب:1)</u> $x\in[1;3]$ يعني $1\le x\le3$

$y\in[2;4]$ يعني $2\le y\le4$

$1\le x\le3$ يعني $1^2\le x^2\le3^2$ يعني $1\le x^2\le9$

$2\le y\le4$ يعني $2^2\le y^2\le4^2$ يعني $4\le y^2\le16$

$1\le x\le3$ يعني $2\times1\le2x\le2\times3$ يعني $2\le2x\le6$

$2\le y\le4$ يعني $3\times2\le3\times y\le3\times4$ يعني $6\le3y\le12$

$1\le x\le3$ يعني $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{1}$ يعني $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le1$

$2\le y\le4$ يعني يعني $\frac{1}{4}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

لدينا $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$ اذن: $1\times\frac{1}{4}\le x\times\frac{1}{y}\le3\times\frac{1}{2}$ اذن: $\frac{1}{4}\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$

2)<u>تأطير A :</u> $6\le3y\le12$ يعني $-12\le-3y\le-6$

وحسب النتائج السابقة وبجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$1+4+2-12\le x^2+y^2+2x-3y\le9+16+6-6$

وبالتالي: $-5\le A\le25$

وسعة التأطير هي : $r=25-(-5)=30$

<u>تأطير B :</u> $B=\frac{2x-1}{x+1}=(2x-1)\times\frac{1}{x+1}$

لدينا $1\le x\le3$ يعني $2\le2x\le6$ يعني $2-1\le2x-1\le6-1$

يعني $1\le2x-1\le5$

لدينا $1\le x\le 3$ يعني $2\le x+1\le 4$ يعني $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$

وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1\le 2x-1\le 5$ و $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$ طرف لطرف نجد

$1\times\frac{1}{4}\le(2x-1)\times\frac{1}{x+1}\le 5\times\frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{4}\le B\le\frac{5}{2}$

وسعة التأطير هي : $r=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

تمرين15: التأطير و العمليات

1. تحقق من أن: $14^2<200<15^2$

ثم استنتج أن: $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2. بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب:1) لدينا $14^2=196$ و $15^2=225$ ومنه $14^2<200<15^2$

لدينا $14^2<200<15^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{200}<\sqrt{15^2}$

اذن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times100}<\sqrt{15^2}$ أي : $14<\sqrt{2}\times10<15$

أي : $14\times\frac{1}{10}<\sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10}<15\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) لدينا $22^2=484$ و $23^2=529$ ومنه $22^2<500<23^2$

لدينا $22^2<500<23^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$

اذن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times100}<\sqrt{15^2}$ أي : $22<\sqrt{5}\times10<23$

أي : $22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $2,2<\sqrt{5}<2,3$

3) لدينا $1,4<\sqrt{2}<1,5$ و $2,2<\sqrt{5}<2,3$

اذن : $1,4+2,2<\sqrt{2}+\sqrt{5}<1,5+2,3$ أي : $3,6<\sqrt{2}+\sqrt{5}<3,8$

و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: $1,4\times2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times2,3$

أي : $3,08<\sqrt{10}<3,45$

تمرين16:

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

1) $|\sqrt{2}-2|$ 2) $|3-2\sqrt{3}|$ 3) $|\sqrt{5}-\sqrt{2}|$

4) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|+|9-5\sqrt{3}|$

الجواب:

1) لدينا $\sqrt{2}<2$ اذن : $\sqrt{2}-2\in\mathbb{R}^-$ ومنه

$|\sqrt{2}-2|=-(\sqrt{2}-2)=-\sqrt{2}+2$

2) لدينا $3<2\sqrt{3}$ لأن : $3^2<(2\sqrt{3})^2$

اذن : $3-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$ ومنه $|3-2\sqrt{3}|=-(3-2\sqrt{3})=-3+2\sqrt{3}$

3) لدينا $\sqrt{5}>\sqrt{2}$ اذن : $\sqrt{5}-\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$ ومنه $|\sqrt{5}-\sqrt{2}|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

4) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|+|9-5\sqrt{3}|$

$A=4-2\sqrt{3}--(5-3\sqrt{3})+(5\sqrt{3}-9)$

$A=4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9=0$

تمرين17:

1. أحسب : $(3\sqrt{2}-5)^2$

2. قارن العددين: $3\sqrt{2}$ و 5

3. بسط : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

الجواب: 1) $(3\sqrt{2}-5)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$(3\sqrt{2}-5)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=43-30\sqrt{2}$

2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $(3\sqrt{2})^2=18$ و $(5)^2=25$

اذن $3\sqrt{2}<5$ ومنه $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}=|3\sqrt{2}-5|$

$=-(3\sqrt{2}-5)$ لأن : $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

تمرين18: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : 1) $|x-1|=5$

2) $|x+2|=-1$ 3) $|2x+1|=|x-3|$

الجواب:1) $|x-1|=5$ يعني $x-1=5$ أو $x-1=-5$

يعني $x=6$ أو $x=-4$ اذن : $S=\{-4;6\}$

2) المعادلة : $|x+2|=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن القيمة المطلقة دائما موجبة

اذن : $S=\varnothing$

3) $|2x+1|=|x-3|$ يعني $2x+1=x-3$ أو $2x+1=-(x-3)$

يعني $x=-4$ أو $2x+1=-x+3$ يعني $x=-4$ أو $x=\frac{2}{3}$

اذن : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

تمرين19: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية: 1) $|x-1|\le 2$

2) $|x+2|\ge 3$ 3) $|2x+1|<6$

الجواب:1) $|x-1|\le 2$ يعني $-2\le x-1\le 2$ يعني

$-2+1\le x-1+1\le 2+1$ يعني $-1\le x\le 3$

اذن : $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\ge 3$ يعني $x+2\ge 3$ أو $x+2\le -3$

يعني $x\ge 1$ أو $x\le -5$ يعني $x\in[1;+\infty[$ أو $x\in]-\infty;-5]$

اذن : $S=]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ يعني $-6<2x+1<6$ يعني $-6-1<2x+1-1<6-1$

يعني $-7<2x<5$ يعني $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$

يعني $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ اذن : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

تمرين20: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x\ge\frac{1}{2}$ و $y\le 1$

و $x-y=3$.

1. أحسب قيمة العدد E حيث: $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

2. بين أن: $\frac{1}{2}\le x\le 4$ و أن $-\frac{5}{2}\le y\le 1$

3. أحسب قيمة العدد F حيث: $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

الجواب: 1) $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

لدينا $x\ge\frac{1}{2}$ يعني $2x\ge 1$ يعني $2x-1\ge 0$

ولدينا $y\le 1$ يعني $2y\le 2$ يعني $2y-2\le 0$

ومنه : $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

$E=2x-2y+1=2(x-y)+1$ ونعلم أن : $x-y=3$

ومنه : $E=2\times3+1=7$

2)- نبين أن: $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$

نعلم أن : $x-y=3$ اذن : $x=y+3$

ولدينا $x\geq\frac{1}{2}$ اذن : $y+3\geq\frac{1}{2}$ اذن : $y\geq\frac{1}{2}-3$

اذن : $y\geq\frac{-5}{2}$ وبما أن $y\leq1$ فان : $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$

- نبين أن: $\frac{1}{2}\leq x\leq4$

نعلم أن : $x-y=3$ اذن : $y=x-3$

ووجنا سابقا أن : $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$

اذن : $-\frac{5}{2}\leq x-3\leq1$ يعني $-\frac{5}{2}+3\leq x-3+3\leq1+3$

ومنه: $\frac{1}{2}\leq x\leq4$

3)حساب قيمة العدد F حيث: $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

نبحث عن اشارة $x+y-5$

ووجنا سابقا أن : $-\frac{5}{2}\leq y\leq1$ و أن $\frac{1}{2}\leq x\leq4$

اذن: $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\leq x+y\leq1+4$ يعني $-2\leq x+y\leq5$

يعني $-2-5\leq x+y-5\leq5-5$ يعني $-7\leq x+y-5\leq0$

أي أن : $x+y-5$ سالب

نبحث عن اشارة $x+y+2$

وجنا سابقا أن : $-2\leq x+y\leq5$

يعني $-2+2\leq x+y+2\leq5+2$ يعني $0\leq x+y+2\leq7$

أي أن : $x+y+2$ موجب

اذن : $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

اذن : $F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

تمرين21: **نعلم أن** $\sqrt{7}$ **= 2,6457513110 ………**

1. حدد قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
2. حدد قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
3. حدد قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

الجواب: من التأطير $2,645\leq\sqrt{7}\leq2,646$

1. العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
2. العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
3. العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

تمرين22: لدينا $(\pi\simeq3.1415926.....)$

حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتفريط و بإفراط

الجواب: $3.14<\sqrt{10}<3.15$

ولدينا : $3.15-3.14=0.01=10^{-2}$ اذن

- العدد 3.14 قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- العدد 3.15 قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمرين23: **التقريب العشري لعدد**

أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط (استعمل المحسبة).

$(\sqrt{10}\simeq3.16227766)$

الجواب: $3.162<\sqrt{10}<3.163$

ولدينا : $3.163-3.162=0.001=10^{-3}$ اذن

- العدد 3.162 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- العدد 3.163 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمرين24: حدد الجزء الصحيح للعدد $\sqrt{2}$

الجواب: لدينا: $1\leq\sqrt{2}\leq2$ و منه فان $E(\sqrt{2})=1$

تمرين25: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4} بتفريط (استعمل المحسبة).علما أن : $(\sqrt{3}\simeq1.732050808...)$

الجواب : لدينا: $1,732\leq\sqrt{3}\prec1,733$

أي $(1732)\cdot10^{-3}\leq\sqrt{3}\prec(1732+1)\cdot10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.

و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمارين في الترتيب للبحث

تمرين1: a و b عددان حقيقيان بحيث: $-\frac{1}{2} \prec b \prec a$

1. حدد إشارة كل من العددين $2a+1$ و $2b+1$.
2. قارن العددين: 1 و $\frac{2a+1}{2b+1}$.
3. استنتج ترتيبا للأعداد: 1 و $\frac{2a+1}{2b+1}$ و $\frac{2b+1}{2a+1}$.

تمرين2: التأطير و العمليات

ليكن x عنصرا من المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$, نضع: $A=\frac{x}{x+2}$

1. حدد تأطيرا للعدد $x+2$ ثم استنتج تأطيرا للعدد A محددا سعته.
2. تحقق من أن: $A=1-\frac{2}{x+2}$
3. حدد تأطيرا للعدد A سعته $\frac{2}{15}$.

تمرين3: تحديد قيمة مقربة لعدد

ليكن a عنصرا من المجال المغلق الذي مركزه 1 و شعاعه $\frac{1}{2}$.

1. تحقق من أن: $\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$
2. حدد قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{a}$ بالدقة $\frac{2}{3}$.

تمرين4: ليكن a عدد حقيقي حيث : $a \ge 1$

1) بين أن $a \ge \sqrt{2a-1}$

2) نضع $A=\sqrt{a-\sqrt{2a-1}}-\sqrt{a+\sqrt{2a-1}}$

أ - حدد إشارة A

ب- احسب قيمة A في حالة a=1 ثم في حالة a=5

ج- بين أنه لكل a من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $A^2=2$ ثم استنتج A

تمرين5: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث :

$3,13 \le x \le 3,17$ و $|y+1| \le 3.10^{-2}$

1) بين أن $-1,03 \le y \le -0,97$

2) حدد تأطيرا للعدد $(y-3)^2$

3) أطر العدد xy

تمرين6: a و b عددان حقيقيان بحيث :

$a \prec 3$ و $b \prec \frac{1}{2}$ و $ab=1$

1) بين أن $2 \prec a \prec 3$ ثم استنتج أن : $\frac{1}{3} \prec b \prec \frac{1}{2}$

2) بين أن $\frac{3}{7} \prec \frac{1}{a-2b} \prec 1$

3) تحقق أن $\frac{5}{7}$ قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{a-2b}$ بالدقة $\frac{2}{7}$

تمرين7: نضع $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$ و $B=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

1. حدد إشارة A
2. بين أن $A^2=2$ ثم استنتج A
3. حدد إشارة B
4. أحسب B^2 ثم استنتج B

تمرين8: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث :

$-1<y<0$ و $|x-2|<1$

1. بين أن $1 \le x \le 3$
2. حدد تأطيرا للعدد $x+y$ و $x \times y$
3. حدد اشارة : $x+y-\sqrt{x^2+y^2}$

تمرين9: ليكن x عددا حقيقيا نضع : $A=x^2+4x$

بين أن $|A|<8$

تمرين10: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث :

$|x|<\frac{1}{2}$ و $|y-2|<\frac{1}{2}$ بين أن $1 \le \frac{2y}{y-x} \le 5$

تمرين11: ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$.

1. قارن : $\frac{5a+b}{20}$ و $\frac{ab}{5a+b}$
2. ثم استنتج أن: $\frac{ab}{5a+b}+\frac{bc}{5b+c}+\frac{ac}{5c+a} \le \frac{3}{10}(a+b+c)$

تمرين12: ليكن a و b عددان حقيقيان بحيث : $a<1$ و $b<1$

1. قارن : 8 و $\frac{a^2}{a-1}$ بدراسة الفرق
2. ثم استنتج أن: $\frac{a^2}{a-1}+\frac{b^2}{b-1} \le 8$

تمرين13:

1. ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty,-2[$,

قارن : 5 و $-3x-1$ باستعمال خصائص الترتيب

2. ليكن x عنصرا من المجال $]-4,+\infty[$,

قارن : 9 و $-2x+1$ باستعمال خصائص الترتيب

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron »
dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien