تمرين10 :تمرين 1: نعتبر المتجهتين $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

بسط المتجهتين $\vec{U}$ و $\vec{V}$

الجواب: $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$

$\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$

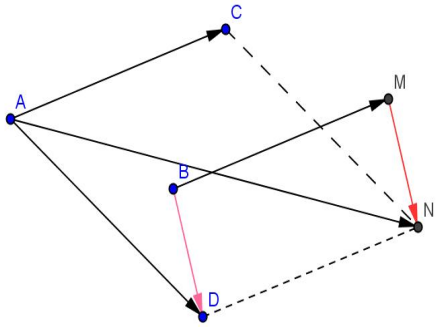
$\vec{V}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$

تمرين 2: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى

1)أنشئ النقط M و N بحيث: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2)قارن المتجهتين : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{MN}$

الجواب:1)



1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

ومنه: $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

تمرين3 : ABC مثلث و M نقطة من المستوى

نعتبر النقط D و E بحيث: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$

ماهي طبيعة الرباعيين $ABCD$ و $ACBE$ ؟

الجواب:1) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$

يعني $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ومنه $ABCD$ متوازي الأضلاع

2) $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$

يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ يعني $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$

ومنه $ACBE$ متوازي الأضلاع

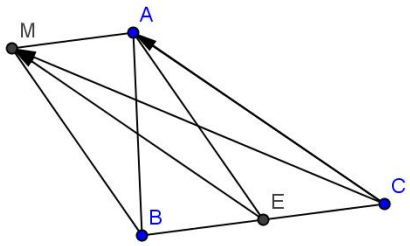
تمرين 4: ليكن ABC مثلث و لتكن E منتصف القطعة $[BC]$ و M نقطة من المستوى حيث: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

1)أرسم شكلا. 2)بين أن: $ACEM$ متوازي الأضلاع

3)بين أن: $AEBM$ متوازي الأضلاع

الجواب:1)

أنظر الشكل



2)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$ يعني $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$

يعني $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CA}$ يعني $-\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AC}$

ومنه $ACEM$ متوازي الأضلاع

3)مثلا يكفي ان نبين أن: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$ ؟؟؟؟؟؟

لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{ME}$ يعني $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BE}$

ونعلم أن : E منتصف القطعة $[BC]$ اذن : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$

ومنه $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}$ وبالتالي : $AEBM$ متوازي الأضلاع

تمرين 5: A و B نقطتان من المستوى بحيث : $AB=1cm$

1) أرسم النقطتين C و D بحيث : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$

2)أحسب المسافتين : AC و AD

الأجوبة : 1)

2) لدينا $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ اذن : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$

اذن : $AC=|2|AB$ اذن : $AC=2AB$ اذن : $AC=2cm$

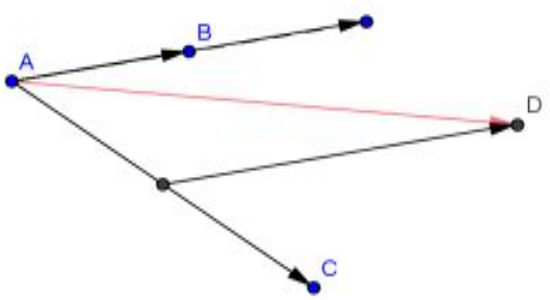
لدينا $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$ اذن : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{AB}\right\|$

اذن : $Ad=|-3|AB$ اذن : $AD=3AB$ اذن : $AD=3cm$

تمرين6 : لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية.

أنشئ النقطة D بحيث $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

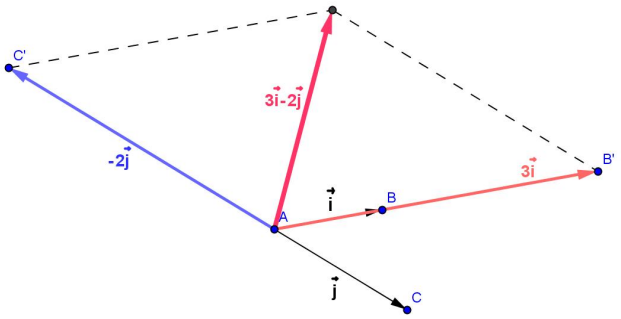
الجواب :



تمرين7 : ABC مثلث و نضع : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

أنشئ المتجهات التالية : $3\vec{i}$ و $-2\vec{j}$ و $3\vec{i}-2\vec{j}$

الجواب :



تمرين8 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان. نضع: $\vec{w}=\frac{3}{5}\left(5\vec{u}-\frac{7}{2}\vec{v}\right)-6\left(\vec{u}+\frac{1}{10}\vec{v}\right)$

أوجد عددين حقيقيين x و y بحيث: $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

الجواب : $\vec{w}=\frac{3}{5}\left(5\vec{u}-\frac{7}{2}\vec{v}\right)-6\left(\vec{u}+\frac{1}{10}\vec{v}\right)=3\vec{u}-\frac{21}{10}\vec{v}-6\vec{u}-\frac{3}{5}\vec{v}$

$\vec{w}=-3\vec{u}-\frac{27}{10}\vec{v}$ ومنه $x=-3$ و $y=-\frac{27}{10}$

تمرين9: ليكن ABC مثلثا. ولتكن النقطة D حيث $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$.

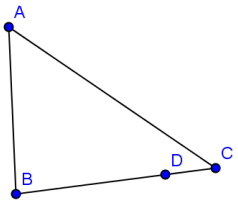
1. بين أن: $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيمتين
2. أنشئ النقطة D

الجواب : 1) لدينا $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}=3\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)$

تكافئ $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{BC}$

تكافئ $\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$

تكافئ $4\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ تكافئ $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



وبالتالي : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيمتين

2) $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ومنه الانشاء

تمرين10: نعتبر النقط A و B و M بحيث: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

1. بين أن: $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$

2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

الجواب :1) $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

يعني $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $-5\overrightarrow{AM}=-6\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

اذن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتين

2) $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$ تعنى أن النقط A و B و M مستقيمية وأن

M تنتمي إلى المستقيم (AB).

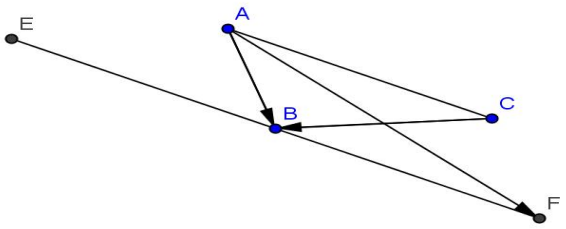
تمرين11 : ABC مثلث و E و F نقطتين بحيث :

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$: و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1) أنشئ شكلا تقريبيا

2) بين أن B منتصف القطعة $[EF]$.

أجوبة :1)



2) يكفي مثلا أن نبين أن : $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ حسب علاقة شال

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ باستعمال المعطيات

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ لأن : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

ودائما حسب علاقة شال نجد $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

وبالتالي B منتصف القطعة $[EF]$.

تمرين12 : ليكن ABC مثلثا. إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ فان: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

الجواب: ليكن ABC مثلثا. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

لدينا: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ملاحظة : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **تعني أن المتجهتين** $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتين

ومنه : $(IJ)\parallel(BC)$

تمرين13 : ABC مثلث و E و F نقطتان حيث:

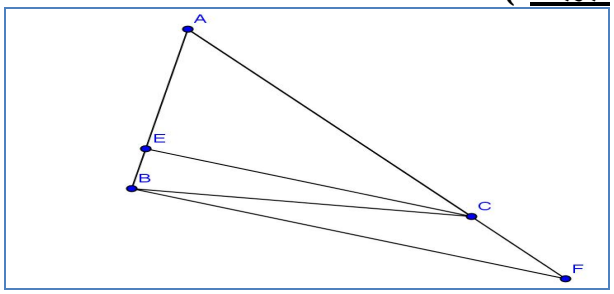
$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

1) أنشئ الشكل.

2) أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) استنتج أن المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

أجوبة :1)



2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ حسب علاقة شال اذن : $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ وهي النتيجة المطلوبة ولدينا $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ حسب علاقة شال

اذن : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ وهي النتيجة المطلوبة

3) وجدنا $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ اذن : $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

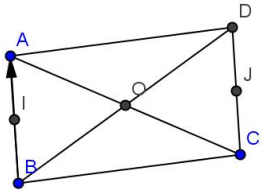
اذن : $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ يعني $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

اذن :المستقيمين (BF) و (EC) متوازيان.

تمرين14:ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. I و J هما على التوالي منتصفي القطعتين $[AB]$ و $[CD]$.

1)بين أن: $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2)استنتج أن O هو منتصف القطعة $[IJ]$.



أجوبة :1)

نعتبر المثلث ABC لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و O منتصف القطعة $[AC]$ اذن حسب خاصية لدينا : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

ونعتبر المثلث ACD لدينا J منتصف القطعة $[DC]$ و O منتصف القطعة $[AC]$ اذن حسب خاصية لدينا : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2)لكي نبين أن : O هو منتصف القطعة $[IJ]$

يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟؟؟

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

ومنه : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

وبالتالي : O هو منتصف القطعة $[IJ]$.

تمرين 15:ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و E و F نقطتان حيث:

$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

1)بين أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2)بين أن: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

ماذا تستنتج بالنسبة للنقط F و B و E ؟

أجوبة 1:)أ)حسب علاقة شال $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

ونعلم أن : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

اذن : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

ب)حسب علاقة شال $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$ اذن : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

2) $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$

$=3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DC}$ وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فان : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

اذن : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

الاستنتاج: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

ومنه النقط F و B و E مستقيمية

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين1 :ليكن ABC مثلثا و M و N و P ثلاث نقط بحيث: $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) دون إنشاء الشكل, بين أن: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}$.

2) بين أن M منتصف القطعة $[NP]$.

تمرين2:ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى ونعتبر النقط : P و Q و R بحيث: $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OB}$ و لتكن النقطة I بحيث $RPQI$ متوازي أضلاع

1) بين أن النقط : O و D و R مستقيمية

2) بين أن المستقيمين (PR) و (AB) متوازيان.

3) بين أن النقط : O و C و I مستقيمية

تمرين 3: ABC مثلث و A' منتصف القطعة $[BC]$. و لتكن B' منتصف القطعة $[AC]$ و لتكن النقطة G بحيث $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

ونضع : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

1) عبر عن المتجهة $\overrightarrow{AG}$ ثم المتجهة $\overrightarrow{AA'}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$

2) عبر عن المتجهتين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{BB'}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$

3) استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{BB'}$ مستقيميتان وماذا تستنتج بالنسبة للنقط : B و B' و G ؟

تمرين 4:ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و E و F نقطتان حيث: $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) أرسم شكلا.

2) بين أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

3) بين أن: للنقط F و C و E مستقيمية

4) ولتكن I منتصف القطعة $[DF]$والنقطة J بحيث : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BJ}$

بين أن: C منتصف القطعة $[IJ]$

تمرين 5:ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و G و H نقطتان حيث: $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AH}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AG}$

1) بين أن: $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{HA}$ و $\overrightarrow{HC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{HB}$

2) بين أن: $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

3) بين أن النقط B و C و H مستقيمية